Mathematicaによる線形代数

講義内容

1. 行列とベクトルの定義（基本）
2. 行列とベクトルの定義（関数の利用）
3. 行列の部分抽出
4. スカラーとベクトルの演算
5. ベクトルと行列の積・外積
6. 行列演算（転置、逆行列、行列式、小行列）
7. 線形連立1次方程式の解法

行列やベクトルの定義（1）

行列やベクトルはリストとして定義する。

- ベクトル
  - リストそのものとして定義する。
- 行列
  - リストのリストとして定義する。
  - 各行が1つのリストを構成し、その集合として行列を構成する。

練習1

- 行列を定義する。

```
In[1]:= A = {{1, 2}, {3, 4}}
Out[1]= {{1, 2}, {3, 4}}
```

- ベクトルを定義する

```
In[2]:= b = {x, y}
Out[2]= {x, y}
```

行列･ベクトルの定義（2）

行列の定義

Table[f(i,j), {i,m},{j,n}]

- i行j列成分を関数f(i,j)とする行列を定義する。

Array[変数名,{m,n}]

- i行j列成分が　変数名[i,j]である行列を定義する。

[リスト]を対角項とする行列を定義する

DiagonalMatrix[リスト]

n次元の単位行列を定義する。

IdentityMatrix[n]

練習2

```
In[4]:= Table[10 i + j, {i, 2}, {j, 2}]

Out[4]= {{11, 12}, {21, 22}}

In[5]:= Array[a, {2, 2}]

Out[5]= {{a[1, 1], a[1, 2]},
         {a[2, 1], a[2, 2]}}

In[6]:= DiagonalMatrix[b]

Out[6]= {{x, 0}, {0, y}}
```

スカラーとベクトルの演算

1. ベクトルとスカラーの加減算

   A+1 ベクトルの各成分へ同じ値を加える

   （これは数学の定義と異なるので注意が必要）

2. ベクトルのスカラー倍

   kA ベクトルの各成分にスカラーを掛ける

3. ベクトルの加減算

   A + B ベクトルの成分ごとの加減算

4. ベクトル・行列への関数の適用

   各成分に関数を適用することになる。

練習4

```
In[38]:= a = {1, 2}; b = {3, 4}

Out[38]= {3, 4}

In[39]:= a + 10

Out[39]= {11, 12}

In[43]:= k a

Out[43]= {k, 2 k}

In[41]:= a + b

Out[41]= {4, 6}
```

ベクトルと行列の積・外積

1. ドット(.)演算子の利用

   A . B

   – 行列とベクトルの積を求める
   – 行列と行列の積を求める
   – ベクトル同士の演算では内積(スカラー積)

2. 外積(ベクトル積)の計算

   Outer[Times, ベクトル1, ベクトル2]

練習5

```
In[46]:= a . b

Out[46]= 11

In[50]:= a = {p, q, r}; b = {u, v, w}

Out[50]= {u, v, w}

In[51]:= a . b

Out[51]= p u + q v + r w

In[52]:= Outer[Times, a, b]

Out[52]= {{p u, p v, p w}, {q u, q v, q w}, {r u, r v, r w}}
```

転置・逆行列・行列式・小行列

1. 行列の転置

Transpose[M]　　行列Mの転置を求める。

2. 逆行列

Inverse[M] 行列Mの逆行列を求める。

3. 行列式の値

Det[M]　　　　　行列Mからなる行列式の値を求める。

4. 小行列

Minors[M, n]　　行列Mのn次の小行列を列挙する。

練習6

```
M = {{a, b}, {c, d}}

    {{a, b}, {c, d}}

Transpose[M]

    {{a, c}, {b, d}}

Det[M]

    -b c + a d
```

固有値･固有ベクトル

1. 固有値

   Eigenvalues[M]　正方行列Mの固有値を求める。

2. 固有ベクトル

   Eigenvectors[M]　正方行列Mの固有ベクトルを求める。

3. 固有値とベクトルを得る

   Eigensystem[M]　正方行列Mの固有ベクトルを求める。

4. 特異値

   SingularValueList[M] 非零の特異値を求める.

練習7

入力

m={{a,b},{c,d}}

入力

Eigenvalues[m]

$$\frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)$$

入力

Eigenvectors[m]

$$-\frac{-a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}}{2\,c},\ 1\Big\},\ \Big\{-\frac{-a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}}{2\,c},\ 1$$

連立1次方程式の解法

問題:

次の連立方程式を解く。

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

方法:

1. Solve[連立1次方程式, 変数リスト]
2. LinearSolve[係数行列, 右辺ベクトル]

練習7

```
In[84]:= a = {{2, 1}, {3, -2}}; x = {x1, x2}; b = {4, -1}

Out[84]= {4, -1}

In[85]:= Solve[a . x == b, {x1, x2}]

Out[85]= {{x1 → 1, x2 → 2}}

In[87]:= LinearSolve[a, b]

Out[87]= {1, 2}
```

演習問題

１．IdentityMatrix，Table，DiagonalMatrix 等を用いて以下の行列を作成しなさい。

① ３次の単位行列

② 対角成分が{1,5,7}である３次の対角行列

③ ４次の零行列

④ i行j列成分の値がi/jとなる５行３列の行列

演習問題

２．次の行列について、以下の操作を行いなさい。

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 10 & 12 & 11 & 9 \\ 17 & 19 & 21 & 20 \\ 24 & 26 & 28 & 30 \end{bmatrix}$$

① ３行２列成分を取り出しなさい。

② ２行目の成分を取り出しなさい。

③ １行目と4列目を取り除いてできる部分行列を作成しなさい。

演習問題

３．次のベクトルの和差、内積，外積を求めなさい。

a={1, 2 ,3, 4} , b={6, 5, 3, 2}

４．次の行列について$a+b$, $a-b$, a^Tbを求めなさい。ここで，a^Tはaの転置行列を示す．

$$a=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}p & q & r\\ s & t & u\end{bmatrix}$$

演習問題

５．次の行列の逆行列を求めなさい。

$$(1)\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad (2)\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

６．前問で求めた逆行列と元の行列の積が単位行列となることを確認しなさい。

演習問題

７．次の行列について、転置行列、逆行列、行列式の値を求めなさい。また、求めた逆行列がもとの行列の逆行列であることを確認しなさい。

$$
\begin{bmatrix}
p & q & 0 & 0 \\
q & p & q & 0 \\
0 & q & p & q \\
0 & 0 & q & p
\end{bmatrix}
$$

演習問題

８．演習問題5（１）と7の行列について，固有値と固有ベクトルを求めなさい．

９．演習問題5（１）と7の行列を対角化しなさい．

演習問題

10. 次の連立１次方程式の解を、SolveとLinearSolveで求めなさい

$$(1)\begin{cases} 3x+6y+6z=3 \\ 5x+10y+7z=11 \\ 4x+7y+5z=6 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} -x+2y-z=3 \\ 2x-5y+3z=-5 \\ 3x-5y+5z=-4 \end{cases}$$