Mathematicaによる簡単な力学

内容

１．微分方程式の解法

微分方程式が次式で与えられるとする．

```
x''[t] == 10
```

初期条件が次式で与えられるとする．

```
x[0] == 0, x'[0] == 1
```

この問題は次式のようにして解く．

```
DSolve[{x''[t] == 10, x[0] == 0, x'[0] == 1}, x[t], t]
```

微分方程式を解く

演習問題 1

次の微分方程式を解きなさい．

```
y''[t] == -1 , y[0] == 0, y'[0] == 10
```

２．鉛直上方に投げた質点の運動

初速度v = 50 で鉛直上方に投げ出された質点の運動方程式と境界条件は次式で与えられる．

```
x''[t] == -g, x[0] == 0, x'[0] == 50
```

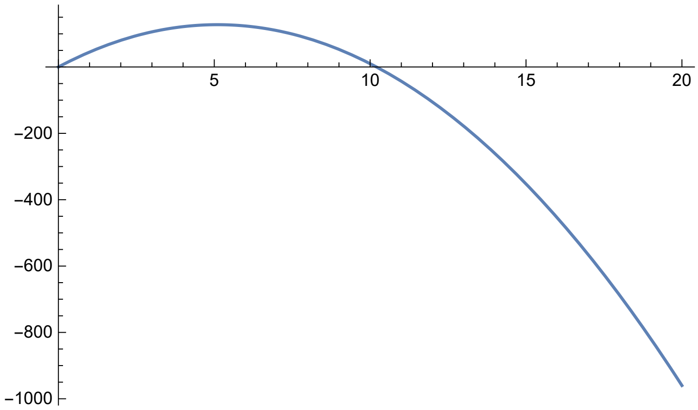
g = 9.8 として微分方程式を解くと次式を得る．

```
DSolve[{x''[t] == -9.8, x[0] == 0, x'[0] == 50}, x[t], t]
```

微分方程式を解く

横軸にt，縦軸にx[t] をこれをグラフにプロットするためには次のように入力する．

```
Plot[Evaluate[x[t] /. %], {t, 0, 20}]
```
… 評価



ここで，Evaluate[x[t] /. %] について少し説明する．% には，先に微分方程式を解いて得られた解の式を参照する．解がOut[12] にあるならば，% は %12 と記載すること．単に，% と記載すると直前のOutの解を参照することになる．

演習問題 2

上記の質点の運動を，0 < t < 20 についてアニメーションとして表示してみよ．

3．自由落下する質点の運動（空気抵抗無）

初速度y'[0]= 0 で投げ出す。最初の位置をy[0] = 0 とすると，運動方程式と境界条件は次式となる．

```
y''[t] == -g, y[0] == 0, y'[0] == 0
```

g = 9.8 として微分方程式を解くと次式を得る．

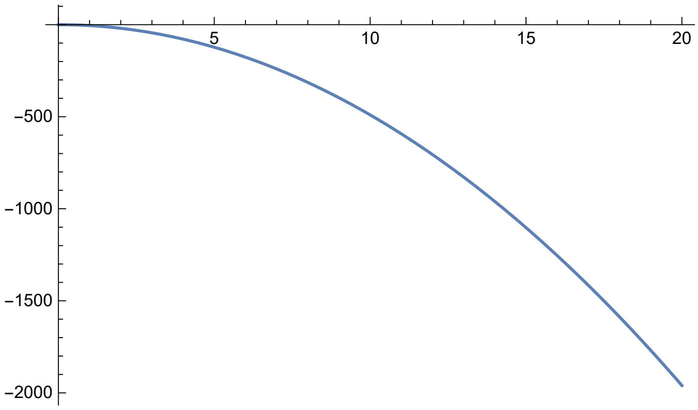
```
Clear[x, y, t]
```
クリア

```
DSolve[{vy'[t] == -9.8, y[0] == 0, vy[0] == 0, vy[t] == y'[t]}, {vy[t], y[t]}, t]
```
微分方程式を解く

この場合は，vyが速度を与えていることになる．微分の階数を見かけ上おとすことで，微分方程式を簡単にしている．

横軸にt，縦軸にy[t] をとってグラフをプロットすると次のようになる．

```
Plot[Evaluate[y[t] /. %73], {t, 0, 20}]
```
評価



演習問題３

（１）横軸にt，縦軸にvy[t] をとってグラフをプロットせよ．

（２）横軸にvy[t]，縦軸にy[t] をとってグラフをプロットせよ．

４．自由落下する質点の運動（空気抵抗有）

空気抵抗は速度に比例するとする．初速度y'[0]= 0 ，最初の位置をy[0] = 0 とすると，運動方程式と境界条件は次式となる．

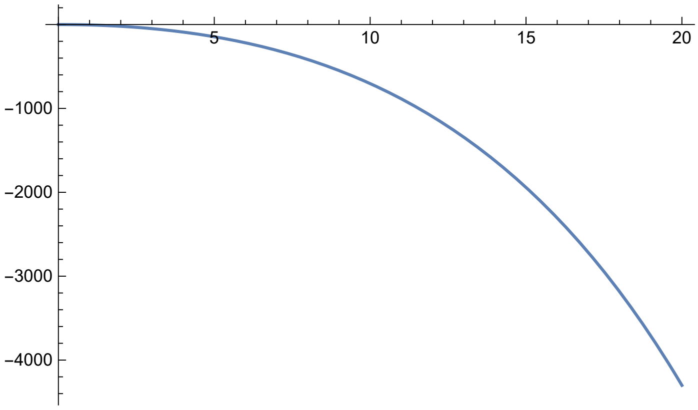
```
y''[t] == -g + k y'[t], y[0] == 0, y'[0] == 0
```

解きやすくするために，vy[t] == y'[t] とする．g = 9.8，k = 0.1 として微分方程式を解くと次式を得る．

```
DSolve[{vy'[t] == -9.8 + 0.1 vy[t], y[0] == 0, vy[0] == 0, vy[t] == y'[t]},
 {vy[t], y[t]}, t]
```
微分方程式を解く

横軸にt，縦軸にy[t] をとってグラフをプロットすると次のようになる．

```
Plot[Evaluate[y[t] /. %82], {t, 0, 20}]
```
評価



演習問題４

空気抵抗が速度の2乗に比例するとして問題を解き，横軸にt，縦軸にy[t] をとってグラフをプロットせよ．

５．水平方向に投げた質点の運動

この場合は，鉛直上方に投げた質点の場合と異なり，2 次元の運動となる．水平方向 (x方向) には等速度運動を，垂直方向（y方向）には等加速度運動をする．初速度を50とすると次の連立方程式を得る．

```
x''[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == 50
```

```
y''[t] == -g, y[0] == 0, y'[0] == 0
```

最初に変数をクリアしておく．

```
Clear[x, y, t]
```
クリア

g = 9.8 として微分方程式を解くと次式を得る．

```
DSolve[{x''[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == 50,
  y''[t] == -9.8, y[0] == 0, y'[0] == 0}, {x[t], y[t]}, t]
```
微分方程式を解く

その場合は，少し条件を補足してあげるとうまくいく場合もある．例えば，2 つに分けてみる．

```
Clear[x, y, t]
```
クリア

```
DSolve[{x''[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == 50}, x[t], t]
```
微分方程式を解く

または，1 階の導関数を別の変数においてみる．

```
Clear[x, y, t]
```
クリア

```
DSolve[{vy'[t] == -9.8, y[0] == 0, vy[0] == 0, vy[t] == y'[t]}, {vy[t], y[t]}, t]
```
微分方程式を解く

この場合は，vyが速度を与えていることになる．微分の階数をとすることで，微分方程式を簡単にしている．

演習問題５

（１）横軸にt, 縦軸にx[t], y[t] をとってグラフを記述せよ．

（２）横軸にx[t], 縦軸にy[t] をとってグラフを記述せよ．

６．単振動

質量mの質点にばね定数kのバネを接続する．単振動の運動方程式は次式で与えられる．

```
m x'' = -k x
```

これを変形すると次式となる．

```
x''[t] + k/m x[t] == 0
```

x = x0まで引っ張って手を離す場合を考える．k/m=1, x0=5とすると

```
DSolve[{x''[t] + x[t] == 0, x[0] == 5, x'[0] == 0}, x[t], t]
```
微分方程式を解く

```
{{x[t] → 5 Cos[t]}}
```

演習問題 6

単振動における質点の位置，速度，加速度を求め，横軸に時間tをとって位置，速度，加速度を同一のグラフにプロットしなさい．

7．単振り子

質量mのおもり（質点）が長さlの糸でつり下げられている．この状態から，おもりを水平方向に引っ張り，角度sだけおもりを振り上げた状態で手を離す．この場合の，運動方程式は次式となる．ここで，qは重力加速度である．

$$\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\mathrm{Sin}[s] == 0$$
正弦

まず，近似解を求めことを考える．Sin[s] をs = 0 付近でテイラー展開して1次まで近似する．

```
Series[Sin[s], {s, 0, 1}]
```
級数展開 正弦

```
Normal[%]
```
通常の式に変換

これより支配方程式は次式となる．

$$\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{g}{l}\,s == 0$$

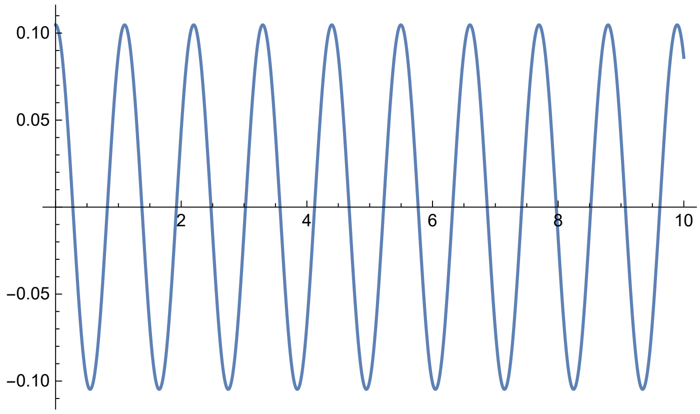
g = 9.8 , l = 0.3, s[0] = π/30, s'[0] == 0 として解くと次式となる．

```
DSolve[{s''[t] + 9.8/0.3 s[t] == 0, s'[0] == 0, s[0] == π/30}, s[t], t]
```
微分方程式を解く

これをグラフにプロットすると次式となる．

```
Plot[Evaluate[s[t] /. %], {t, 0, 10}]
```

… 評価



演習問題 7

（１）同じ条件において，Sin[s] を近似せずに支配方程式をといてみよ．

（２）近似する場合と，近似しない場合で解を求め，グラフにプロットして比較せよ．